

Capítulo 4

Acumulación de capital y crecimiento. El modelo de Solow.

1. Introducción:

¿Por qué crece una economía?

- Capital
- Educación
- Inversión
- Progreso tecnológico
- Factores institucionales y culturales

Para comprender e intentar contestar las preguntas que se planteaban en el primer capítulo, como: ¿Porque algunos países son ricos y otros no?, lo haremos mediante el uso de modelos, es decir, mediante la creación de representaciones simplificadas de la realidad en las que se intenta aislar el fenómeno que se quiere estudiar abstrayendo todos los demás aspectos de la economía.

2. El modelo de Solow:

Rober Solow recibió en 1987 el Premio Nobel de Economía, por su contribución a la comprensión del crecimiento económico, entre los que destaca, "A Contribution to the Theory of Economic Growth".

El modelo de Solow-Swan significa la llegada del neoclasicismo a la teoría del crecimiento. Hasta entonces el modelo de crecimiento dominante era el de inspiración keynesiana de Harrod-Domar, por lo que el modelo de Solow significa la respuesta a la cuestión económica del crecimiento por parte de la economía ortodoxa. La principal diferencia en sus conclusiones del modelo de Solow frente al de H-D será que si prescindimos de las proporciones fijos en los factores *el crecimiento puede alcanzar un equilibrio estable*.

La otra conclusión importante del modelo de Solow es que la economía puede llegar finalmente a una *situación de estancamiento y equilibrio que llamaremos "estado estacionario"*. Esta conclusión nace del supuesto teórico neoclasicista de rendimientos decrecientes de cada uno de los factores de producción y en particular del capital. Esto quiere decir, que por mucho capital que acumulemos, no tenemos una capacidad indefinida para seguir creciendo. Esta suposición obligará a los teóricos, como veremos, a contemplar factores exógenos y en particular, al desarrollo tecnológico, para justificar la evidencia empírica de que el crecimiento sostenido a largo plazo, es posible.

No obstante no todo en el modelo de Solow es ortodoxia neoclásica. La idea de que el ahorro depende fundamentalmente de la renta y no tanto de los tipos de interés es una idea keynesiana por ejemplo. Y Solow también se aleja del neoclasicismo al suponer que la oferta de trabajo es independiente de los salarios reales.

Resumiendo las aportaciones que Solow toma de los keynesianos y los neoclásicos :

Hipótesis keynesianas

- El ahorro es función del ingreso. No se considera el enfoque tradicional neoclásico que hace depender el ahorro del tipo de interés.
- La oferta de trabajo es relativamente independiente del salario real.

Hipótesis neoclásicas:

- La función de producción tiene factores sustitutivos. Además presenta rendimientos a escala constantes y marginalmente decrecientes.
- Todo el ahorro es invertido, lo que asegura el equilibrio en los mercados de bienes puesto que toda la renta generada se gaste, que la renta y el producto sean iguales, por lo que podemos afirmar que $Y=C+I+G+(X-N)$

2.1 Características del modelo:

La construcción del modelo se hace en torno a dos funciones; la de producción y una de acumulación de capital. Las características y asunciones que se hacen en el modelo son las siguientes:

Función de producción:

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t)$$

Donde K_t es el capital, L_t la cantidad total de trabajadores la economía en el momento t y A_t es el nivel de tecnología.

La función de producción en la que se basa el modelo es la función de producción neoclásica, es decir, aquella que satisface las siguientes condiciones:

- Rendimientos constantes a escala:

$$F(\alpha K, \alpha L, A) = \alpha F(K, L, A)$$

Es decir, si multiplicamos K y L por una constante arbitraria, α , entonces la producción también se multiplica por la misma constante. (homogeneidad de grado uno).

- Productividad marginal del trabajo y capital, positiva pero decreciente:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 K} < 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 L} < 0$$

- Condiciones de Inada:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty$$

Específicamente en este modelo se usa la función de producción de Cobb-Douglas

$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$, la cual satisface dichas condiciones.

Deducción de la ecuación fundamental de Solow

Qué es lo que hace que aumente el capital:

Asumiendo que la la tasa de depreciación del capital es constante $D = \delta K_t$ y que la tasa de ahorro también (se ahorra una proporción constante del producto/renta y se consume el resto $C_t = (1 - s)Y_t$)

La inversión bruta (la cantidad de output adquirido por la empresa I_t) es igual a la inversión neta (el aumento neto en el stock de maquinaria o capital) más la depreciación. Luego si consideramos el aumento de capital como $\dot{K} \equiv \frac{dK}{dt}$, lo que tenemos es:

$$I_t = \dot{K}_t + D_t$$

Donde D_t es la depreciación. Considerando que la depreciación es constante tenemos que $D = \delta K_t$, por lo que obtenemos :

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$$

Ahora sustituimos en la función de equivalencia entre renta/producción y usos de la renta. Lo que se produce o bien se consume o bien se invierte.

$$F(K_t, L_t, A_t) = C_t + I_t = (1 - s)F(K_t, L_t, A_t) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

$$\dot{K}_t = sF(K_t, L_t, A_t) - \delta K_t$$

Luego esta ecuación nos diría cual es el aumento del stock de capital durante el siguiente periodo. El aumento en la cantidad de capital es importante pues, a su vez, nos generará un aumento o crecimiento de la producción.

Partimos de la función anterior y la pasamos a términos per cápita

$$\frac{\dot{K}_t}{L_t} = s \frac{F(K_t, L_t, A_t)}{L_t} - \delta \frac{K_t}{L_t}$$

Definiendo las variables en términos per cápita tenemos; el stock per cápita $k_t \equiv K_t/L_t$, consumo per cápita $c_t \equiv C_t/L_t$, y la producción per capital $y_t \equiv Y_t/L_t$.

Introducimos la función de producción en términos per cápita.

Como ya hemos dicho la función de producción presenta rendimientos constantes a escala, por lo que podemos escribir la función de producción en términos per cápita tal que:

$$y \equiv \frac{Y}{L} = \frac{1}{L} F(K, L, A) = F\left(\frac{1}{L}K, \frac{1}{L}L, A\right) = F(k, 1, A) \equiv f(k, A)$$

Así pues la producción per cápita es una función del capital per cápita y la tecnología.

En el caso de la función de producción Cobb-Douglas, tenemos que

$$y \equiv \frac{Y}{L} = \frac{1}{L} AK^\alpha L^{1-\alpha} = A \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha \left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} = Ak^\alpha (1)^{1-\alpha} = Ak^\alpha$$

Por lo que

$$(I) \quad \frac{\dot{K}_t}{L_t} = s \frac{F(K_t, L_t, A_t)}{L_t} - \delta \frac{K_t}{L_t} = sf(k_t, A_t) - \delta k_t$$

Suponemos que la población crece a una tasa exógena y constante ($n \equiv \frac{\dot{L}}{L}$)

Luego podemos calcular la tasa de crecimiento del capital por persona como

$$(II) \quad \dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t L_t - \dot{L}_t K_t}{L_t^2} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{K_t}{L_t} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - nk_t$$

Luego, utilizando las ecuaciones anteriores :

$$(I) \quad \frac{\dot{K}_t}{L_t} = sf(k_t, A_t) - \delta \frac{K_t}{L_t}$$

$$(II) \quad \dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - nk_t$$

Se deduce que:

$$\dot{k}_t = sf(k_t, A_t) - \delta k_t - nk_t$$

Un último paso, suponemos nivel tecnológico constante

Consideramos que el progreso tecnológico es contante ya que resulta más útil prescindir de todas las fuentes alternativas de crecimiento potencial, puesto que queremos analizar el la función de la inversión en capital como determinante del crecimiento económico.

Luego tenemos que $A_t = A$.

Con esta última consideración obtenemos la conocida como **ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan**:

$$\dot{k}_t = sf(k_t, A) - (\delta + n)k_t$$

Teniendo una función de producción Cobb-Douglas, tendríamos:

$$\dot{k}_t = sAk_t^\alpha - (\delta + n)k_t$$

Esta ecuación nos dice, dado el stock de capital per cápita existente en la economía en el momento t , cuál será el incremento del stock de capital per cápita en el próximo instante, \dot{k}_t , es decir, nos describe cómo evolucionará el stock de capital per cápita.

Podemos interpretar la ecuación fundamental de Solow-Swan como que el stock de capital por persona aumenta con la diferencia entre el ahorro bruto de la economía y el término $(\delta + n)k$. Cuando aumenta la tasa de ahorro, la inversión agregada aumenta. Como la inversión sirve para aumentar la cantidad de máquinas, el stock de capital aumenta.

δk , este término nos indica que cuanto mayor es la fracción de máquinas que se deprecia en un momento dado, δ , menor es el aumento en el stock de capital por persona. nk opera de un modo parecido, al crecer la población el stock per cápita de capital decrece en igual medida.

2. 2 El estado estacionario

Dado que todos los términos de la ecuación fundamental dependen del ratio capital/trabajo k , el modelo de Solow-Swan se representa mostrando como varían dichos términos en función del valor de k .

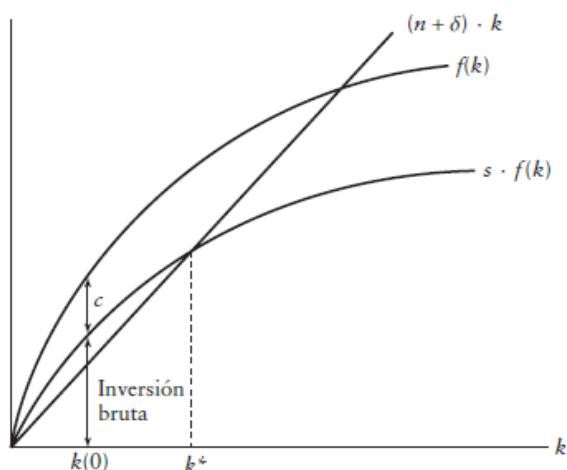
Para entender que significa dicha gráfica debemos una vez más recordar la ecuación fundamental

$$\Delta k = sf(k, A) - (\delta + n)k$$

Lo que nos dice la ecuación fundamental es que el ratio de capital/trabajo “ k ” aumenta o disminuye según la comparación de dos términos; $sf(k,A)$ y $(\delta+ n)k$ donde al primero sumando se le suele denominar *curva de ahorro*, mientras que al segundo se le llama *curva de depreciación*.

Cuando la producción per cápita ahorrada $sf(k,A)$ es mayor que $(\delta+ n)k$ entonces k aumenta, la economía se vuelve más intensiva en capital, la gente más rica y en la gráfica nos desplazamos a la derecha. Traducido a la gráfica quiere decir que si nos encontramos a la izquierda de k^* , k está aumentando y por tanto nos desplazamos hacia la derecha.

Por el contrario si nos encontramos a la derecha de k^* el efecto es el contrario, k está disminuyendo y nos estamos desplazando hacia la izquierda. (Gráfico 1)



Análisis de la gráfica de la ecuación fundamental de Solow

Vemos del gráfico 1 como k^* es un valor de equilibrio. Es la proporción de capital/trabajo a la que la economía tiende automáticamente y en la que permanece de forma estable en el tiempo salvo que algún impacto exógeno altere el valor de s , n o A .

Cuando la economía alcanza el valor k^* el capital deja de acumularse, dejamos de crear más riqueza por habitante y por lo tanto la economía, se estanca. Es lo que en el modelo de Solow-Swan se llama el **Estado estacionario**.

En este gráfico también se muestra la proporción de la renta per cápita se está consumiendo “ c ” y que proporción se está dedicando a la inversión “ I ”, pudiendo distinguir la parte de inversión bruta y la parte de inversión neta. Recordamos en todo momento que en este modelo $S=I$ y que la producción y renta son equivalentes.

Estado estacionario con función de producción tipo Cobb-Douglas

Determinando el estado estacionario suponiendo la existencia de una función de producción de tipo Cobb-Douglas tendríamos:

$$\Delta k = sf(k, A) - (\delta + n)k$$

Donde en el estado estacionario buscamos k^* tal que $\Delta k=0$

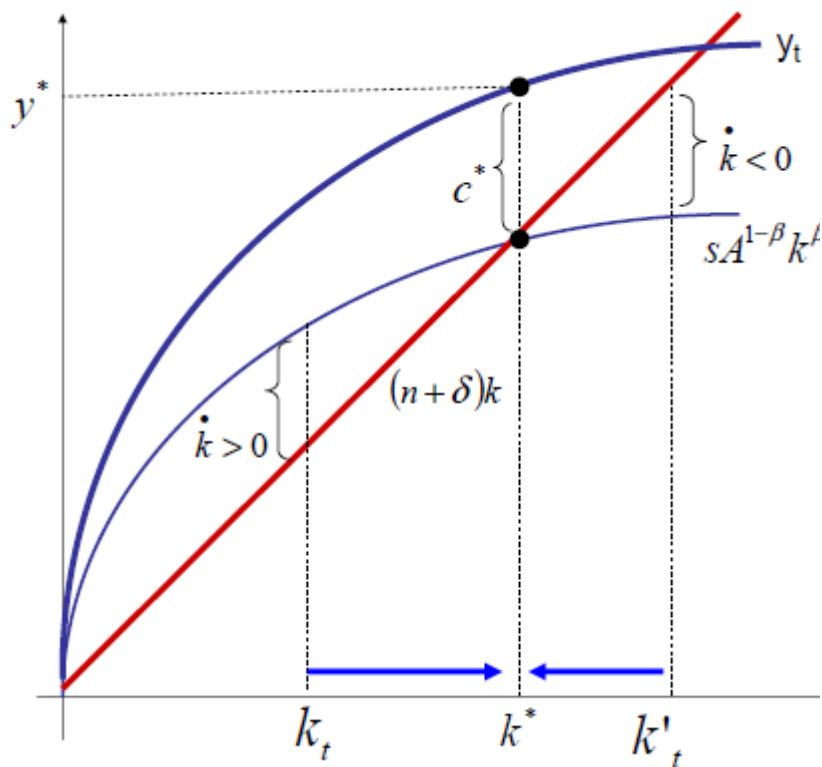
$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

El estado estacionario depende por tanto proporcionalmente del valor de s, A e inversamente del valor de δ, n . Así pues seremos más ricos si ahorramos más o tenemos mayor tecnología e inversamente de la tasa de depreciación y del crecimiento vegetativo.

En la siguiente gráfica representaremos la ecuación fundamental de Solow con los movimientos que la llevan al equilibrio, la función de producción de Cobb-Douglas y el estado estacionario en k^* .

Usando la siguiente función de producción, tenemos los siguientes ejemplos:

$$Y_t = K_t^\beta (AL_t)^{1-\beta} \quad A > 0 \quad \beta \in (0,1)$$



También podemos representar en la gráfica anterior cambios en el valor de las variables exógenas y como éstos afectan al nivel de capital per cápita en el estado estacionario.

Por ejemplo, en los siguientes gráficos podemos ver; una caída en la tasa de crecimiento de la población de n a n' y una caída en la tasa de ahorro de s a s' .

Gráfico: Caída en el crecimiento de la tasa de la población

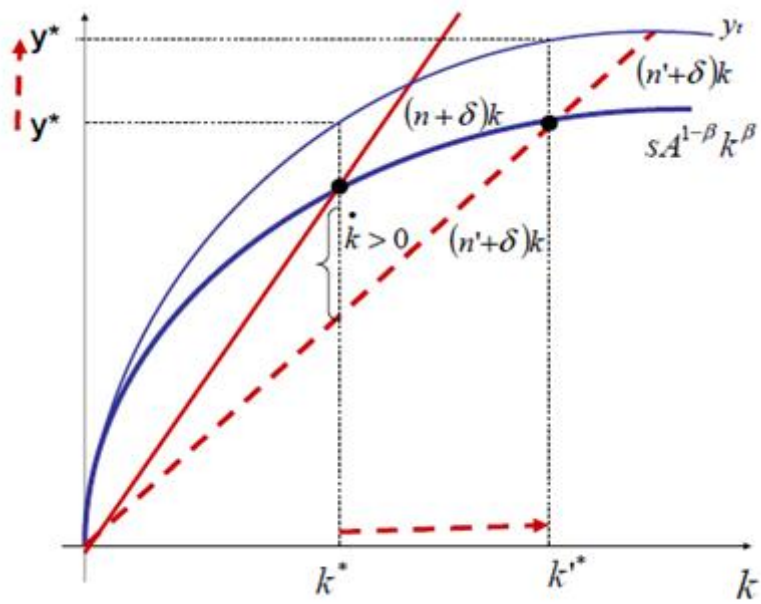
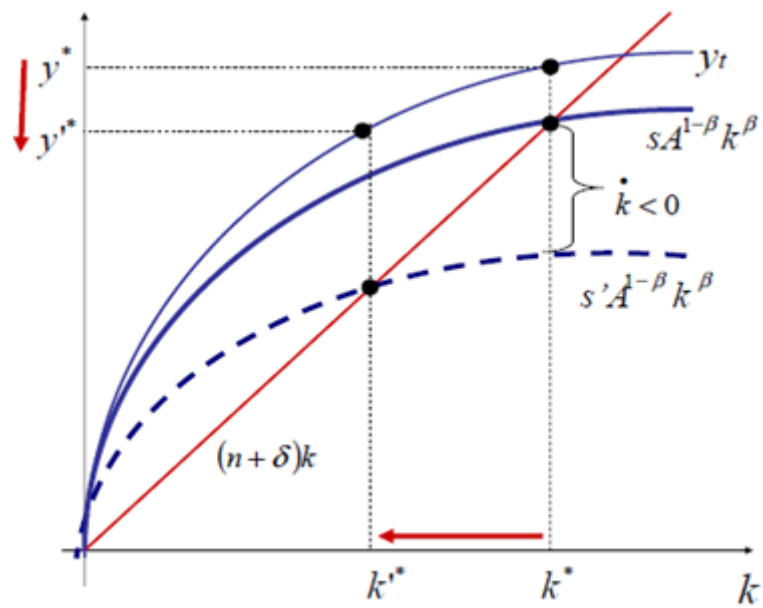


Gráfico: Caída de la tasa de ahorro



La versión de Barro

Barro propuso una nueva manera de representar la ecuación fundamental en la que era más fácil observar los movimientos de transición al equilibrio.

La idea de Barro consistió en dividir la ecuación fundamental de Solow entre el capital por trabajador k , puesto que esto nos permite representar la tasa de variación del capital per cápita. Así pues la Ecuación Fundamental quedaría:

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - nk_t - \delta k_t$$

Dividiendo entre k_t

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = s \frac{f(k_t)}{k_t} - n - \delta$$

Donde:

$\frac{\dot{k}_t}{k_t}$ Tasa de variación del capital per cápita

$s \frac{f(k_t)}{k_t}$ Curva de ahorro

n Curva de depreciación

Utilizando la función de producción Cobb-Douglas, la versión de Barro se nos quedaría:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = sA \frac{k_t^\alpha}{k_t} - (n + \delta)$$

Por lo que la ecuación fundamental de Solow-Swan-Barro es:

$$\gamma_k = sA \frac{k_t^\alpha}{k_t} - (n + \delta)$$

Donde γ_k es la tasa de variación (en tanto por uno) del capital per cápita.

En equilibrio estacionario sabemos que $\gamma_k = 0$ (el capital per capita se mantiene estable, sin crecer ni decrecer) así pues en este punto la curva de ahorro igualará la curva de depreciación.

Usando una función de producción tipo Cobb-Douglas para $\gamma_k = 0$ tendremos que:

$$\frac{sAk_t^\alpha}{k} = (n + \delta)$$

Por lo que,

$$\frac{sA}{n + \delta} = \frac{k}{k^\alpha}$$

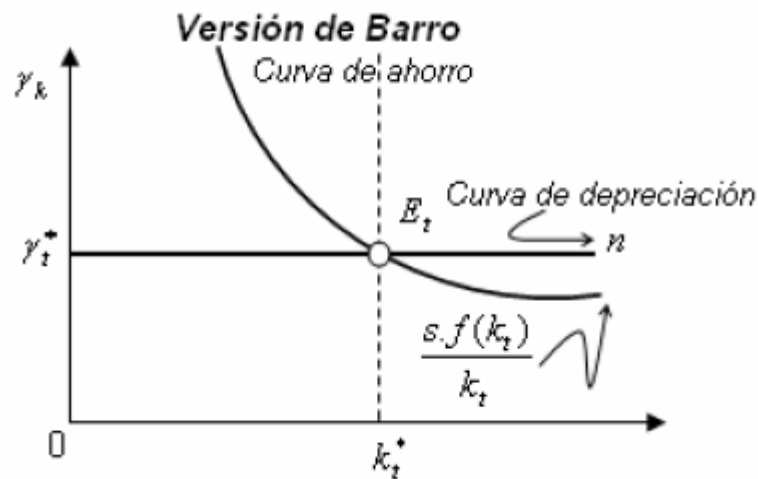
Por lo que nos quedará,

$$k_t^* = \left(\frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Donde $\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \gamma_k = g_k$ Tasa de crecimiento del capital

Si representamos ahora la ecuación fundamental en la versión de Barro su aspecto será el siguiente:

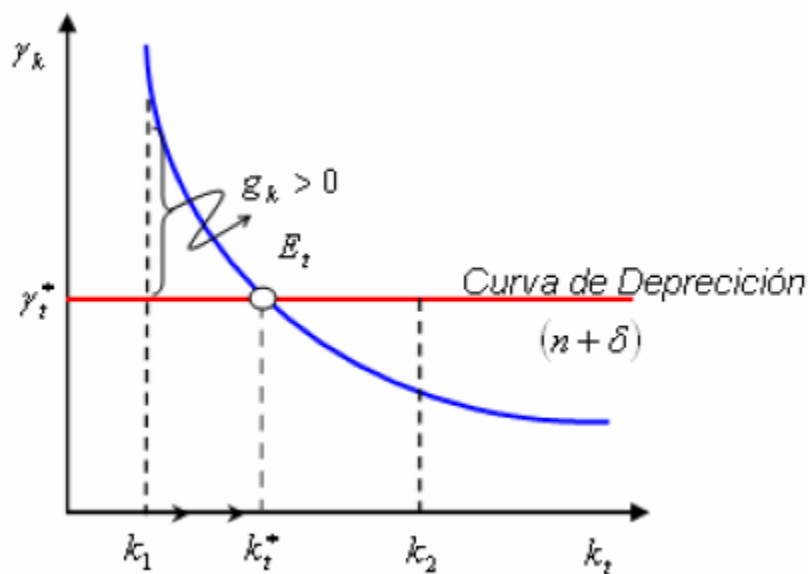
En el estado estacionario correspondiente a k^* también se cumple que $\Delta k/k=0$, por lo que la curva de ahorro es igual a la curva de depreciación; $s(f(k)/k) = n$



En la versión de Barro también es fácilmente observable que el equilibrio estacionario es estable por cuanto si nos encontráramos en un punto $k_1 < k^*$ entonces la curva de ahorro estaría por encima de la de amortización lo que significa que habría una formación neta de capital positiva (se crea más capital del que se destruye per cápita) con lo que k aumentaría acercándose al equilibrio.

Lo contrario ocurriría para un valor $k_2 > k^*$.

Podemos ver el ajuste representado gráficamente de la forma siguiente:



La versión de Barro también nos permite representar cambios en las variables exógenas. En la gráfica siguiente por ejemplo tenemos reflejado un aumento en la tecnología sobre una función de producción de tipo Cobb-Douglas en la que estamos considerando la tecnología como una variable asociada al capital humano (la tecnología es algo que “llevan” consigo las personas, su formación, su cultura del trabajo, su destreza etc.).

En este caso tendríamos la siguiente función:

$$Y_t = K_t^\beta (AL_t)^{1-\beta}$$

Las dinámicas de transición al estado estacionario.

Según el planteamiento del modelo de Maslow, el crecimiento siempre es un tránsito, un camino temporal, hacia el estado estacionario. Desde un punto de vista empírico se ha tratado de identificar estos procesos estableciéndose dos teorías que se han denominado hipótesis de la Convergencia Absoluta e hipótesis de la Convergencia Condicional.

Hipótesis de la Convergencia Absoluta

Según esta hipótesis los países del mundo más desarrollado difieren de los menos fundamentalmente en su relación capital trabajo. Una vez igualada esta no hay razones para que sus rentas converjan. Por tanto, en un contexto de libre mercado, a largo plazo ambos alcanzarán fundamentalmente el mismo estado estacionario y mientras tanto, durante el proceso de transición, los países en vías de desarrollo crecerán más rápidamente que los desarrollados.

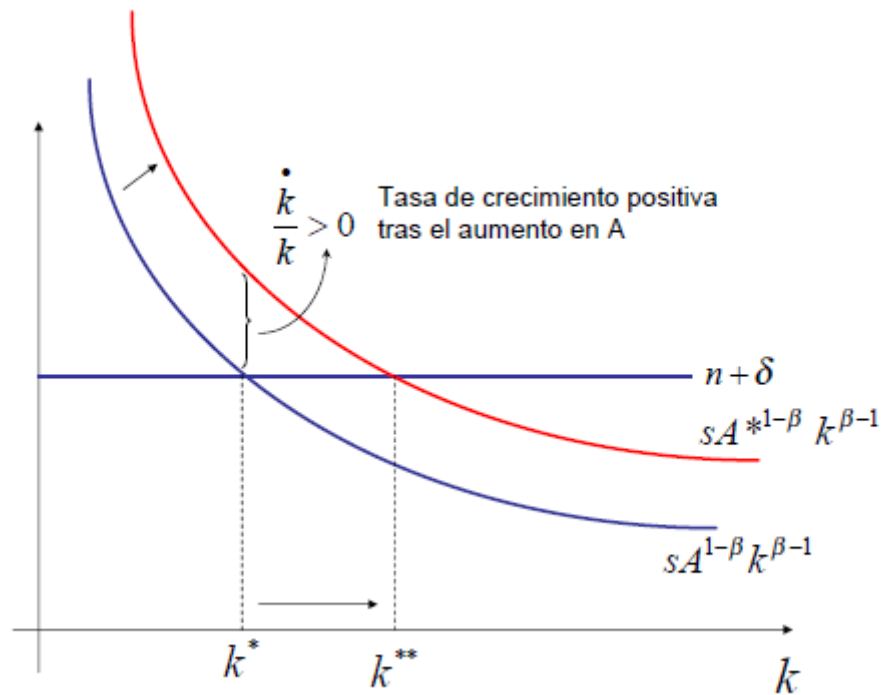
Hipótesis de la Convergencia Condicional

Cada grupo de países tiende hacia su propio Estado Estacionario. Lo que determina la pertenencia de un país a un grupo no está totalmente claro puesto que varía en función del autor y el estudio. Sin embargo podemos contemplar como “grupo” aquellos que cultural e institucionalmente presentan características similares en comparación con otros grupos. Es decir, la convergencia de rentas sólo se da entre países homogéneos.

¿Qué dice la evidencia empírica?

La dinámica de transición hacia el Estado Estacionario prevista por Solow se encuentra apoyada por los estudios empíricos.

Podemos ver el grado de corroboración empírica de ambas hipótesis en la tabla siguiente:



Cuadro 1.1: La Convergencia en el mundo

Series analizadas	Referencia	Convergencia absoluta	Convergencia condicional
Mundo (110 países)	Salan-i-Martín (1996)	No	Si
Mundo (98 países)	Barro (1991)	No	Si
Mundo (98 países)	Mankiw, Romer, Weill (1992)	No	Si
Estados Unidos (48 estados)	Barro y Salan-i-Martín (1992)	Si	Si
OCDE (22 países)	Mankiw, Romer, Weill (1992)	Si	Si
Pacífico del sur (9 islas)	Cashin y Loayza (1995)	Si	Si
América Latina (12 países)	José de Gregorio (1995)	No	Si
América Latina (23 países)	Corbo y Rojas (1994)	No se responde	Si
México (32 estados)	Navarrete (1994)	No evidente	Si
México (31 estados)	J.Ramon y R.Bátiz (1996)	Si	Si

La regla de oro

“cómo ser todo lo felices posible sin fastidiar a nuestros nietos”

Hemos visto en los párrafos anteriores cómo se comportan la producción y el capital per cápita.

Ahora bien, en la teoría económica producir más, no es igual que ser más felices, porque lo que nos hace felices no es producir un montón de máquinas de helados sino comernos muchos helados. Lo que nos hace felices es consumir. No construir bienes de equipo.

Entonces podemos utilizar el modelo de Solow para saber que capital necesitamos en la economía para poder consumir más y ser más felices. Y no se trata de buscar el k^* más alto posible, y con ello la producción per cápita más elevada. La clave está en buscar un k^* que nos permita consumir la mayor cantidad posible de bienes. ¿cómo?

Vamos a suponer que podemos cambiar nuestra tasa de ahorro “ s ”, de forma que podemos ajustarla como queramos. Para cada valor de “ s ” la economía alcanzará una intensidad de capital de equilibrio k^* . Entonces vamos a buscar pues un “ s ” que nos permita llegar a un “ k^* ” que nos maximice “ c ”.

A ese k^* maximizador del consumo lo llamaremos k^{oro} y al proceso de encontrarlo, lo llamaremos “**la regla de oro**”

La idea de la regla del oro la ideó Phelps (1961) en un trabajo llamado "La regla de oro de la acumulación del capital" (*The Golden Rule of Capital Accumulation*) que es un economista de la universidad de Columbia que ganó el premio Nobel en el 2006.

La “regla del oro” nos indica debemos buscar un valor de k que maximice c , pero que al mismo tiempo sea sostenible en el tiempo es decir, que sea un estado estacionario.

Aplicación de la regla del oro

Para ver en qué puntos del gráfico se cumple la regla de oro, partimos de que los estados estacionarios se cumplen para un valor k^* tal que:

$$0 = sf(k^*) - (\delta + n)k^*$$

Introducimos el consumo en la ecuación fundamental utilizando la definición de consumo como aquella parte de la producción que no se invierte $c = f(k^*) - sf(k^*)$. (Equivale a “parte de la renta que no se ahorra”)

$$0 = f(k^*) - c - (\delta + n)k^*$$

$$c = f(k^*) - (\delta + n)k^*$$

$$\frac{dc}{dk^*} = f'(k^*) - (\delta + n) = 0$$
$$f'(k^*) = \delta + n$$

La última ecuación es la conocida como la regla de oro, nos indica que el consumo se maximiza en el estado estacionario cuando el producto marginal del capital per cápita se iguala con su valor de depreciación más el aumento de población. Es decir, la curva de depreciación y la función de producción tienen en ese punto, la misma pendiente (las tangentes son paralelas)

El resultado tiene lógica desde un enfoque puramente marginalista por cuanto al tener el capital rendimientos marginales decrecientes si aumentáramos k^* más allá de este valor su producto marginal sería más pequeño que los costes de depreciación y los absorbidos por el aumento de población adicionales.

Tasa de ahorro que nos lleva a la regla de oro:

Ahora ya comprendemos que es lo que ocurre en el punto de equilibrio de la ecuación fundamental cuando estamos maximizando el consumo.

El siguiente paso se trata precisamente de relacionar ahorro con consumo, y ver qué nivel de ahorro nos maximiza el consumo.

Para ello vamos a adoptar un enfoque matemático distinto. En equilibrio (en el estado estacionario) y utilizando la función de producción de Cobb-Douglas podemos ver que el consumo para cada valor de s se determina por la función siguiente:

$$c = f(k^*) - sf(k^*)$$

$$c = (1 - s) f(k^*)$$

$$c^* = (1 - s)A \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

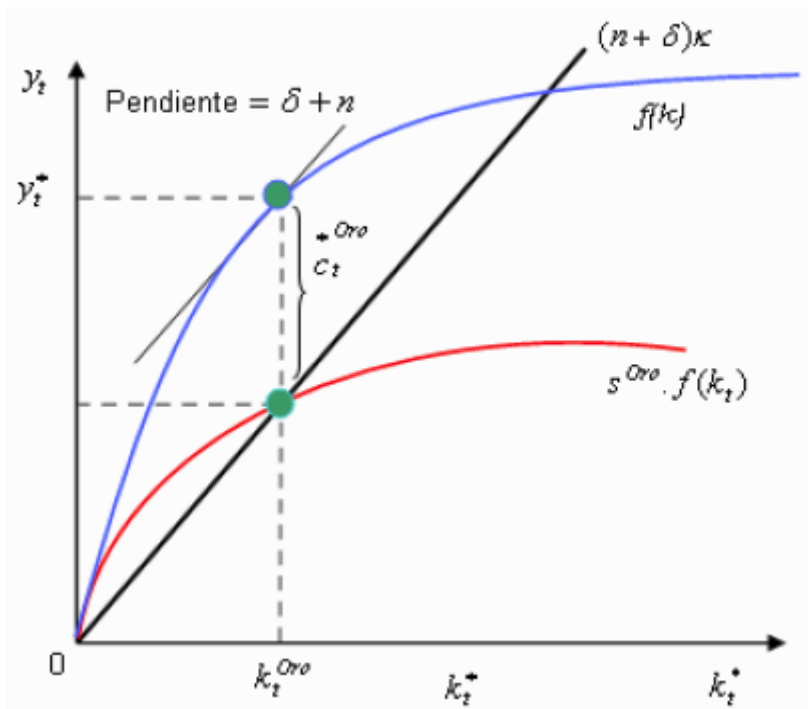
Luego la tasa de ahorro influye en el nivel de consumo que podemos obtener en equilibrio (de una forma sostenible en el tiempo).

El valor máximo vendrá dado por:

$$\frac{dc^*}{ds} = 0 \Rightarrow s = \beta$$

Gráficamente sería:

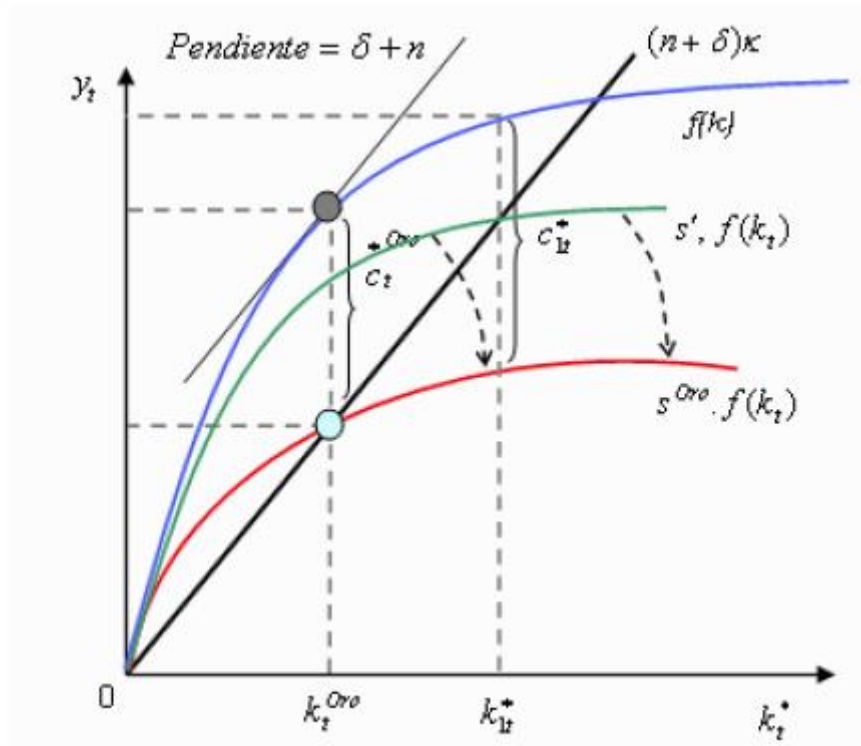
Gráfico XXX: La regla de oro



En la gráfica podemos ver que el crecimiento maximiza los niveles de consumo de una forma equilibrada cuando la pendiente de la curva de amortización iguala a la de la función de producción.

¿Qué ocurre si ahorramos demasiado?

Gráfico:XXXX Tasa de ahorro superior a la regla de oro

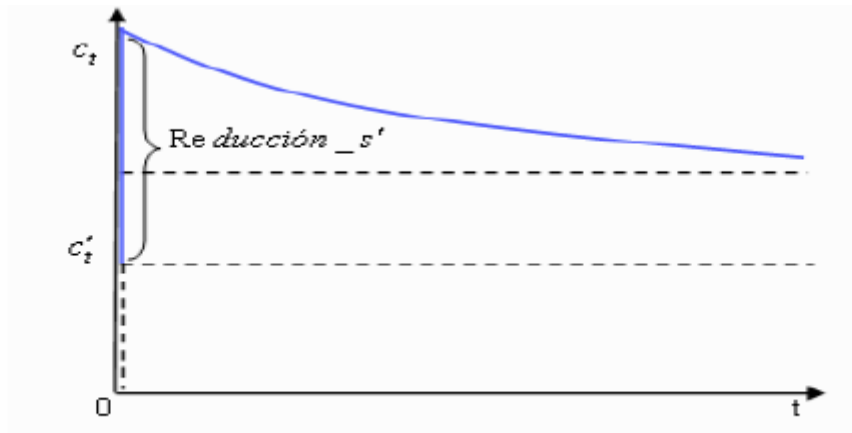


Luego esta economía aumentaría inmediatamente su nivel de consumo en el caso de que redujéramos su ahorro hasta el nivel de la regla del oro. Estaríamos “desinvertiendo” nuestro exceso de capital. Ello nos proporcionaría un aumento de consumo a corto plazo. A largo plazo se iría reduciendo hasta alcanzar el nivel de consumo máximo sostenible de la regla del oro.

Así pues para una economía con exceso de ahorro, una reducción del mismo sería beneficiosa en términos de aumento de consumo tanto a corto como a largo plazo. Por ello decimos que ahorrar en exceso es dinámicamente ineficiente y por lo tanto, no deseable en ningún caso de acuerdo al modelo de Solow.

La variación del consumo en el tiempo sería:

Gráfico; Variación del consumo ante una variación de "s"



¿Qué ocurre si ahorramos demasiado poco?

En este supuesto la respuesta no es tan obvia. Si bien aumentando nuestra tasa de ahorro a largo plazo alcanzaremos un consumo sostenible más elevado (regla de oro), a corto plazo tendremos que acumular un capital extra lo que reducirá nuestro consumo por debajo de los niveles iniciales.

Así pues aumentar nuestro ahorro cuando nos encontramos por debajo de la regla de oro es deseable a largo plazo, pero no a corto, y no podemos por tanto hablar de ineficiencia dinámica.

La decisión de hacerlo dependerá por tanto de nuestras preferencias temporales.

